© Лев Великович

Пособие для абитуриента

«Хороший совет не имеет цены».

Пословица

Часть 1

Совет 1. Принцип* отсроченного действия, или «Спешите медленно!»

Представь себе, что под грудой камней спряталась мышь, которую необходимо поймать. Конечно, можно начать камень за камнем разбирать мышиное укрытие. Правда при этом мышка может из него убежать. Гораздо лучше обойти груду и внимательно посмотреть: не покажется ли где-нибудь хвостик мышки. Тогда до поимки ее останется самая малость.[1]

После прочтения условия задачи первое желание, которое часто возникает – это не решать ее. Пойди на поводу у этого желания. Повремени с преобразованиями и другими действиями. Возможно, именно в этот момент «живого созерцания», ты подметишь полезную закономерность, которая в дальнейшем существенно повлияет на решение. Если данный этап, увы, не принес плодов, то не огорчайся, а попытайся найти область определения, или хотя бы некоторое множество, ее содержащее. Полученная информация может значительно уменьшить неопределенность задачи и привести к быстрому решению. Кроме того, при отыскании области определения глубже проникаешь в структуру задачи, что иногда помогает установить неожиданные связи.

(Напомним, что квадратные скобки [ ] используют, когда отыскивают объединение множеств решений, а фигурные { } – пересечение).

Пример 1

Решить уравнение $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}$.

Решение

Не будем спешить возводить обе части уравнения в квадрат, а найдем область определения:

*Принцип – происходит от латинского слова «начало» или «основа». Этот термин употребляется в связи с самыми различными сферами человеческой деятельности и обозначает то, что лежит в основе рассматриваемых явлений. (Томилин А. Н. В поисках первоначального. – Ленинград: Детская литература, 1978. – С. 145.)

[1] Этот образ решения задачи обычно приписывают одному из первых организаторов математических олимпиад в нашей стране профессору Тартаковскому В. А.

$$\begin{cases} x^2-4x+3\ge 0 \\ -x^2+3x-2\ge 0 \\ x^2-x\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x-3)\ge 0 \\ -(x-1)(x-2)\ge 0 \\ x(x-1)\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 3 \end{array}\right. \\ 1\le x\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=1.$$

Подставляя x = 1 в исходное уравнение, убеждаемся, что это и есть единственный корень.

Пример 2

Решить уравнение $\sqrt{x^2-9x+24}-\sqrt{6x^2-59x+149}=|5-x|$.

Решение

Опять воздержимся от возведения в квадрат обеих частей уравнения. Немного поразмыслив, получим:

$$(|5-x|\ge 0)\Rightarrow(\sqrt{x^2-9x+24}\ge\sqrt{6x^2-59x+149})\Rightarrow(x^2-9x+24\ge 6x^2-59x+149)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(0\ge 5x^2-50x+125)\Rightarrow(x^2-10x+25\le 0)\Rightarrow((x-5)^2\le 0).$$

Но, с другой стороны, $(x-5)^2\ge 0$, ибо квадрат любого числа неотрицателен. Теперь из системы $\begin{cases}(x-5)^2\le 0\\(x-5)^2\ge 0\end{cases}$ следует, что x = 5.

Легко убеждаемся, что это и есть единственный корень исходного уравнения.

Замечание: «Эффект Змея Горыныча»

Попробуем решать исходное иррациональное уравнение стандартным методом. Для этого возведем обе части уравнения в квадрат в надежде, что в конце решения нам удастся выявить посторонние корни с помощью проверки. Имеем:

$$x^2-9x+24-2\sqrt{(x^2-9x+24)(6x^2-59x+149)}+6x^2-59x+149=25-10x+x^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x^2-58x+148=2\sqrt{(x^2-9x+24)(6x^2-59x+149)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x^2-29x+74=\sqrt{(x^2-9x+24)(6x^2-59x+149)}.$$

Далее необходимо обе части полученного уравнения опять возвести в квадрат, что, очевидно, приведет к еще большему «разбуханию» выкладок. Это явление я называю «Эффектом Змея Горыныча» (надеюсь, что ты помнишь сказку о коварном Змее, у которого вместо срубленной головы тотчас вырастали две или три новые). Как правило, наличие «Эффекта Змея Горыныча» связано с тем, что ты идешь по той ветви «веера возможностей», которая ведет в тупик. Поэтому необходимо вернуться к условию задачи и искать другое решение.

В процессе решения почаще задавай себе вопрос: «А нельзя ли здесь сделать по-другому?». Может оказаться, что это другое – проще!

Пример 3

Решить неравенство: $\sqrt{25-x^2}+\sqrt{x^2+x}>3$.

Решение

Начнем с области определения: $\begin{cases} 25-x^2 \ge 0 \\ x^2+x \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5 \le x \le 5 \\ \left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x \in [-5;-1] \cup [0;5].$

Далее возведем обе части неравенства в квадрат. (Это возможно ввиду их неотрицательности.)

$$25-x^2+x^2+x+2\sqrt{25-x^2}\,\sqrt{x^2+x} > 9$$
$$2\sqrt{25-x^2}\,\sqrt{x^2+x} > -x-16.$$

Типичная ошибка, которая здесь обычно совершается, состоит в возведении обеих частей полученного неравенства в квадрат без предварительной проверки их на неотрицательность (смотри: $2 > -3$, но $2^2 = 4 < 9 = (-3)^2$).

Вернемся к области определения. Имеем:

$$(x \ge -5) \Rightarrow (-x \le 5) \Rightarrow (-x-16 \le 5-16) \Rightarrow (-x-16 \le -11 < 0) \Rightarrow (-x-16 < 0).$$

Но $2\sqrt{25-x^2}\,\sqrt{x^2+x} \ge 0.$ Значит, неравенство $2\sqrt{25-x^2}\,\sqrt{x^2+x} > -x-16$ выполняется сразу для всех x из области определения. Поэтому множество исходного неравенства есть $[-5;-1] \cup [0;5]$.

Замечание: ПМЛИ

Как справедливо утверждает Роберт Уилсон: «Мудрым будь – обобщить не забудь!». Так вот, в решении примеров 1, 2, 3 присутствует некоторая общая идея, которую я называю Принципом Максимума Локальной Информации (ПМЛИ): на каждом шагу процесса поиска решения необходимо стремиться к получению максимальной информации из структуры полученной ситуации («выжимай» максимум информации из полученной ситуации).

Как видно из решений примеров, ПМЛИ иногда способствует отсечению ненужных ветвей «веера возможностей» (точнее, веера возможных дальнейших шагов), который, как правило, необходимо строить после каждого шага в процессе поиска решения. Схематически веер возможностей можно изобразить так:

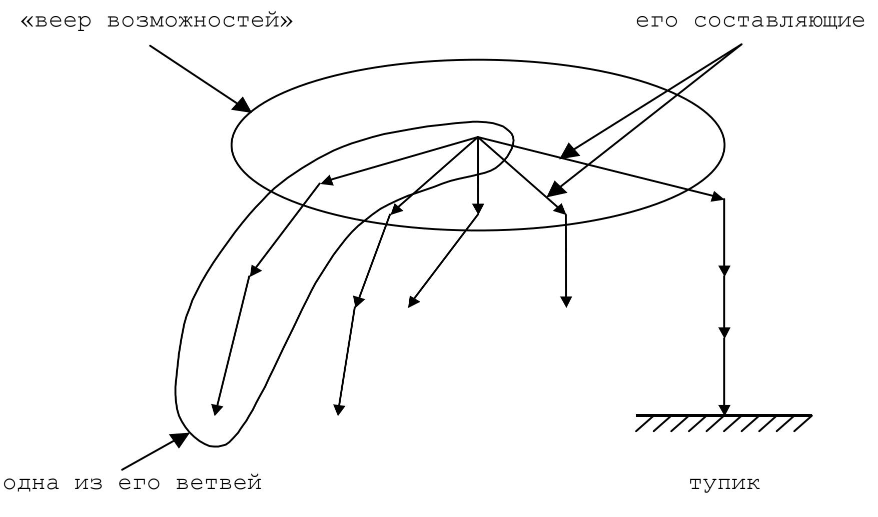

Рис. 1

А для острастки нет ничего лучше сказки. Ехал однажды вечером богатырь Илья Муромец дремучим лесом по длинной-длинной дороге. Ехал он, ехал и, наконец, приехал к развилке, из которой выходили три дороги. На большом придорожном камне было нацарапано следующее: «Налево пойдешь – могилу найдешь; направо пойдешь – к Яге попадешь, а прямо пойдешь – никуда не придешь!». «Какая ни Яга, а все-таки Баба», – подумал Илья Муромец и повернул коня направо.

Внимание – задание:

- Установить, кто сделал надпись на камне.
- Достроить «веер возможностей» Ильи Муромца так, чтобы он имел не менее 5 составляющих.

Пример 4

Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{(x-8)(2-x)}}{\log_{0,3}\left(\dfrac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)} \ge 0 \\ 2^{x-3}-31>0 \end{cases}.$$

Решение

Несмотря на очевидную простоту второго неравенства системы, не будем пока его трогать, а займемся первым.

Шаг 1. «Экспериментальная стадия»

Начнем с числителя. Нетрудно заметить, что числа 2 и 8 являются решениями первого неравенства.

Шаг 2. Оценим число $\log_{0,3}\left(\dfrac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)$, стоящее в знаменателе. Имеем:

$$(5>4)\Rightarrow(\log_2 5>\log_2 4)\Rightarrow(\log_2 5>2)\Rightarrow(\log_2 5-1>1\Rightarrow\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)>\frac{10}{7}>1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)<\log_{0,3}1\right)\Rightarrow\left(\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)<0\right).$$

Шаг 3. Итак, в знаменателе первого неравенства системы отрицательное число. Значит, и числитель (ввиду неотрицательности дроби) должен быть числом неположительным, то есть $\sqrt{(x-8)(2-x)}\le 0$. Но с другой стороны, квадратный корень неотрицателен по определению, то есть $\sqrt{(x-8)(2-x)}\ge 0$. Сравнивая последние неравенства, получаем, что $(x-8)(2-x)=0\Rightarrow\left[\begin{matrix} x=2 \\ x=8 \end{matrix}\right.$, и других решений первое неравенство не имеет.

Шаг 4. Непосредственной подстановкой чисел 2; 8 в неравенство: $2^{x-3}-31>0$, убеждаемся, что только число 8 удовлетворяет обоим уравнениям системы.

Примечание: «Эффект границы»

Найдем область определения системы. Очевидно, она совпадает со множеством решений квадратного неравенства: $(x-8)(2-x)\geq 0$. Откуда следует, что $x\in[2;8]$. А как мы только что установили, x = 8 и является решением нашей задачи, то есть решение совпадает с одним из концов области, которой оно принадлежит. Такая ситуация встречается в математике достаточно часто (например, при исследовании функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], на наибольшие и наименьшие значения). Поэтому, естественно ее как-то назвать. Подходящий термин, по-видимому, и есть «эффект границы». А теперь – рецепт на будущее: в соответствии с «эффектом границы» рекомендуется изучить поведение исследуемого объекта на границе «вследствие того упрямого факта, что весьма часто решение является граничной точкой области изменения переменных». (Беллман Р. Динамическое программирование. – М.: Изд. иностранной литературы, 1960. – 400 с. – С. 9.)

Пример 5

Найти все значения параметра *a*, при которых система $\begin{cases}2^{|x|}+|x|=y+x^2+a\\ x^2+y^2=1\end{cases}$ имеет одно решение.

Решение

Обратив внимание на то, что в каждое из уравнений системы x входит четным образом (другими словами, каждая из функций ($2^{|x|}+|x|-y-x^2-a$) и (x^2+y^2-1) является четной относительно переменной x), приходим к выводу, что если пара (x, y) является решением системы, то и пара (– x, y) также является решением. Ввиду требования единственности решения, эти пары должны совпадать:
$(x,y)=(-x,y)\Rightarrow x=-x\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$.

Подставляя это значение x в систему, получим $\begin{cases}y+a=1\\ y^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1-y\\ y=\pm 1\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=0\\ a=2\end{array}\right.$.

Докажем, что при a = 0 система действительно имеет единственное решение.

1. Второе уравнение системы задает окружность с центром в начале координат радиуса 1. Поэтому геометрически видно, что $|x|\leq 1, |y|\leq 1$. Покажем это аналитически. Имеем: $y^2=1-x^2$; далее $x^2\geq 0\Rightarrow -x^2\leq 0\Rightarrow 1-x^2\leq 1$. Следовательно, $y^2\leq 1$. Отсюда $\sqrt{y^2}\leq\sqrt{1}$ и $|y|\leq 1$. В уравнение $x^2+y^2=1$ переменные x и y входят симметрично. Значит, аналогичное утверждение справедливо и для x.

2. Пусть a = 0. Тогда первое уравнение системы принимает вид: $2^{|x|}+|x|=y+x^2$. Откуда $2^{|x|}=x^2-|x|+y\leq x^2-|x|+1$, ибо $y\leq|y|\leq 1$ (см. п. 1).

3. Покажем, что $|x|\leq 1\Rightarrow x^2-|x|+1\leq 1$. В самом деле, $x^2-|x|+1\leq 1\Leftrightarrow x^2-|x|\leq 0\Leftrightarrow|x|(|x|-1)\leq 0$. Но $|x|\geq 0$, а $|x|-1\leq 0$ и требуемое утверждение доказано.

4. Из пунктов 2-3 получаем $2^{|x|}=x^2-|x|+y\leq x^2-|x|+1\Rightarrow 2^{|x|}\leq 2^0\Rightarrow|x|\leq 0$, ибо при основании большем 1 показательная функция монотонно возрастает. Но $|x|\geq 0$. Следовательно, x = 0 и, значит, равенство $2^{|x|}=x^2-|x|+y$ возможно только при одном значении x. Подставляя x = 0 в уравнение $2^{|x|}=x^2-|x|+y$, получим y = 1.

Итак, данное уравнение имеет единственное решение (0; 1) при условии, что $x^2 + y^2 = 1$. (Очевидно пара (0; 1) является решением и уравнения $x^2 + y^2 = 1$.)

При а = 2 пары (1; 0), (– 1; 0) и (0; – 1) являются решениями исходной системы, в чем не трудно убедиться непосредственной проверкой. Поэтому а = 0 и есть ответ на вопрос задачи.

На примере 5 хорошо видно, что решение сложной задачи – это не конная атака с шашками наголо, а скорее освобождение города от неприятеля, когда необходимо тщательно обследовать каждый дом, подвал, чердак.

Пусть принцип отсроченного действия будет твоим флажком, который поможет тебе избежать ошибок и ненужных действий. Помни, что это – ключ к успеху!

Совет 2. Принцип правильности решения, или «Чувство опасности»

Что имел в виду один древний философ, утверждая, что математика – наука свирепая? Математика – это игра по правилам, в соответствии с которыми строятся необходимые логические цепочки. Каждое нарушение любого из правил – ошибка, которая обычно приводит к пагубным последствиям. Так, если в диктанте по русскому языку, сделав две орфографические и две синтаксические ошибки, ты можешь получить оценку четыре, то в контрольной работе по математике, состоящей из пяти задач, наличие по одной ошибке в каждой из них, приведет, очевидно, к оценке два. Особый бич абитуриентов – ошибки типа описки. Ты и сам прекрасно знаешь, что достаточно один раз ошибочно заменить знак «плюс» на знак «минус» – и дальше можно уже никуда не спешить, ибо все последующие правильные действия приведут скорее всего к неверному результату. Недаром математики уважают афоризм: «Хочешь делать быстро – делай правильно!»

Согласно Зигмунду Фрейду, некоторые описки и ошибки совершаются человеком на подсознательном уровне, и поэтому обнаружить их самому часто очень трудно. Отсюда вытекает необходимость как локального контроля (каждый шаг в решении проверяй дважды), так и глобального (проверка результата решения, хотя бы частичная, на правильность и реальность).

Пример 6

Решить уравнение $\cos x + \sin x = 1$.

Решение
Приведем четыре способа.

Первый способ (часто встречающийся в абитуриентской практике). Возведем обе части уравнения в квадрат. Имеем:

$\cos^2 x + \sin^2 x + 2\cos x \sin x = 1 \Rightarrow 1 + \sin 2x = 1 \Rightarrow \sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = \pi n; n \in Z \Rightarrow x = \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z.$ Но решение, увы, не окончено, ведь было использовано возведение в квадрат, которое может привести к посторонним корням. Поэтому проверка – обязательный этап решения. Нетрудно понять, что проверке подлежат числа из множества $\left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3}{2}\pi\right\}$.

Подставляя их в исходное уравнение, убедимся, что только 0 и $\dfrac{\pi}{2}$ является решениями. Значит, ответ записывается так: $2\pi n, \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k; n, k \in Z$.

Второй способ основан на формуле $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$ (это одна из двух часто применяемых формул «понижения степени». А вот и вторая: $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$).

Имеем: $\sin x = 1 - \cos x \Rightarrow 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2} = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$.

В этом месте абитуриент с радостью сокращает обе части уравнения на $2\sin\frac{x}{2}$, теряя при этом группу решений $\sin\frac{x}{2}=0$. Это грубая ошибка! Берегись ее!

Надо действовать так. Сократив обе части уравнения на 2, перенесем все в левую часть и разложим на множители:

$$\sin\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2}=0\\ \sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\pi m\\ tg\frac{x}{2}=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\pi m\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\pi m\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{array}\right..$$

Решая уравнение $\sin\frac{x}{2}=\cos\frac{x}{2}$, мы делим обе его части на $\frac{x}{2}$. Это корректный шаг, ибо предложение $\cos\frac{x}{2}=0$ влечет за собой $\sin\frac{x}{2}=0$. Откуда следует, что $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству: $\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}=1$.

Кстати, решив уравнение двумя разными способами, мы тем самым осуществили глобальный контроль результата. А это уже некоторая гарантия его правильности.

Третий способ. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)=\sqrt{2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\cos\frac{\pi}{4}\sin x\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Теперь имеем:

$$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=(-1)^n\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}+\pi n=(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n=\frac{\pi}{4}\left(-1+(-1)^n\right)+\pi n.$$

Если n=2k, то $x=2\pi k$. Если же n=2k+1, то $x=-\frac{\pi}{2}+\pi(2k+1)=\frac{\pi}{2}+2\pi k$.

Четвертый способ. Воспользуемся универсальной подстановкой $t=tg\frac{x}{2}$. Далее имеем:

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2};\cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2};\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{2t}{1+t^2}=1\Rightarrow 1-t^2+2t=1+t^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t^2-t=0\Rightarrow t(t-1)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{2}=\pi m\\ tg\frac{x}{2}=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\pi m\\ \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}+\pi k\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\pi m\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi k\end{array}\right.,$$

где $m,k\in Z$.

Примечание: «Метод рационализации»

Использованный в четвертом способе подход применяется для преобразования тригонометрических выражений, содержащих синусы и косинусы одного аргумента (в частности, при интегрировании).

Соответствующие формулы легче вывести, чем запомнить.

Действительно, $\sin x = \dfrac{\sin x}{1} = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$,

$$\cos x = \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}.$$

К сожалению, метод рационализации содержит один подводный камень. А именно: функции cos x и sin x определены для всех действительных значений x, а функция $tg\dfrac{x}{2}$ определена при условии $x \neq \pi + 2\pi n$. Это может привести к потере решений. Например, в уравнении
sin x - cos x значения $x = \pi + 2\pi n$ являются решениями, которые мы потеряем, используя универсальную подстановку. К счастью, в примере 6 этого не происходит.

Пример 7

Решить уравнение: $|x-1|+|x+1|=2$.

Решение
«Метод интервалов».

Шаг 1. Найдем корни подмодульных выражений.

$$x-1=0 \Rightarrow x=1; x+1=0 \Rightarrow x=-1.$$

Шаг 2. Отметим их на координатной прямой. Координатная прямая разбилась при этом на три части «интервала». Корни исходного уравнения, будучи действительными числами, либо попадают в один из полученных интервалов, либо совпадают с их концами.

Шаг 3. Рассматриваем уравнение на интервалах.

I. $x \le -1$

$$\begin{cases} x \le -1 \Rightarrow x+1 \le 0 \Rightarrow |x+1| = -(x+1) \\ x \le -1 \Rightarrow x-1 \le -2 < 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1) \end{cases}$$

$$-x+1-x-1 = 2 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1 \in (-\infty;-1].$$

Значит, x = - 1 есть корень исходного уравнения. (Проверь подстановкой!)

II. $-1 < x \le 1$

$$\begin{cases} -1 < x \Rightarrow x+1 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1 \\ x \le 1 \Rightarrow x-1 \le 0 \Rightarrow |x-1| = -(x-1) \end{cases} \Rightarrow -x+1+x+1 = 2 \Rightarrow 2 = 2.$$

Значит, каждое число из интервала $(-1;1]$ является решением.

III. $x > 1$

$$\begin{cases} x > 1 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow |x-1| = x-1 \\ x > 1 \Rightarrow x+1 > 2 > 0 \Rightarrow |x+1| = x+1 \end{cases} \Rightarrow x-1+x+1 = 2 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1 \notin (1;+\infty).$$

Значит, на данном интервале решений нет.

Шаг 4. Остается «собрать урожай», объединив решения из интервалов:

$\{-1\} \cup (-1;1] = [-1;1]$.

Примечание

1. Первый вопрос, который задают учащиеся: «Почему необходимо рассматривать именно корни подмодульных выражений?». Ответ прост. Функции y = x - 1; y = x + 1, стоящие под модулями, - линейные и нуль каждой из них разделяет область значений функции на интервалы знакопостоянства. (Докажи это самостоятельно!) Кстати, этим фактом объясняется «скоростной» вариант метода интервалов, при котором доказательство подменяется проверкой знака подмодульного выражения в одной точке из рассматриваемого в данный момент промежутка. Без соответствующего обоснования такая процедура не носит доказательной силы. В более сложных ситуациях это может оказаться небезопасным.

2. Что касается концов интервалов, то их можно, конечно, включать в интервалы по-разному. Но я делаю так: левый конец исключаю, правый - включаю, чтобы избежать дублирования. Между прочим, при построении графиков методом интервалов дублирование концов полезно.

3. В рассмотренном примере полная проверка результата решения, понятно, невозможна (нельзя подставить все числа отрезка [- 1; 1] в исходное уравнение). Поэтому на черновике желательно выполнить частичную проверку, взяв хотя бы по одному представителю для каждого из трех интервалов, участвующих в решении.

4. Решение примера можно несколько упростить, если заметить, что функция $|x-1|+|x+1|$ четная и, значит, считая $x \ge 0$, вместо трех интервалов получим два: $[0;1] \cup (1;+\infty)$.

Пример 8

Упростить выражение:

$$A = \left(\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - 1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}},$$ если $x = \dfrac{2\sqrt{n}}{1+n}$, причем n>1.

Решение

$$A=\left(\frac{(1-x^2)^{-1/2}+1}{2}\right)^{-1/2}+\left(\frac{(1-x^2)^{-1/2}-1}{2}\right)^{-1/2}=\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^{-1/2}+\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}\right)^{-1/2}=$$

$$=\left(\frac{2\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}\right)^{1/2}+\left(\frac{2\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\right)^{1/2}=\sqrt{\frac{2\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}}+\sqrt{\frac{2\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}}.$$

Определим значение $1-x^2$ при заданном значении x:

$$1-x^2=\sqrt{1-\frac{4n}{(1+n)^2}}=\sqrt{\frac{1+2n+n^2-4n}{(1+n)^2}}=\sqrt{\frac{(1-n)^2}{(1+n)^2}}=\frac{\sqrt{(1-n)^2}}{\sqrt{(1+n)^2}}=\frac{|1-n|}{|1+n|}.$$

Здесь самое время поставить табличку «СТОП!». Последний переход в решении основан на формуле $\sqrt{x^2}=|x|$. Эта формула – «проклятие абитуриентского рода». Если подсчитать, скольким людям она «подставила ножку», то получится «сумасшедшее число». **Помни это**!

Преодолев данное скользкое место, легко завершаем решение. Так как $n>1$, то $1n>2>0\Rightarrow|1+n|=1+n$. Но из $n>1$ следует, что $-n<-1$ и $1-n<0$, значит, $|1-n|=-(1-n)=n-1$. Поэтому $\sqrt{1-x^2}=\dfrac{|n-1|}{|n+1|}=\dfrac{n-1}{n+1}$.

Окончательно имеем:

$$A=\sqrt{\frac{2\frac{n-1}{n+1}}{1+\frac{n-1}{n+1}}}+\sqrt{\frac{2\frac{n-1}{n+1}}{1-\frac{n-1}{n+1}}}=\sqrt{\frac{2\frac{n-1}{n+1}}{\frac{2n}{n+1}}}+\sqrt{\frac{2\frac{n-1}{n+1}}{\frac{2}{n+1}}}=\sqrt{\frac{n-1}{n}}+\sqrt{n-1}=\sqrt{n-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

При решении примеров на упрощение выражений не следует забывать об области определения. В рассмотренном примере она задается условиями:

$$\begin{cases}1-x^2>0\\1>\sqrt{1-x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x|<1\\0>-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<x<1\\x\neq 0\end{cases}.$$

Легко доказать, что при x = $\dfrac{2\sqrt{n}}{1+n}$ требуемые неравенства действительно имеют место, если $n>1$.

Безусловно, принцип правильности решения – это основное требование, предъявляемое к решению. Поэтому еще раз хочу предостеречь тебя от ошибок-описок, которые подстерегают буквально на каждом шагу. Например, достаточно в условии задачи случайно изменить один из параметров и, как правило, ты вместо «ручной» задачи, допускающей красивое решение, получаешь «дикую», которая вообще не решается элементарными методами. Это как поэзия и проза: если заменить одно слово в четверостишии, то исчезает гармония.

Наряду с ошибками-описками, бывают «зверьки» и пострашнее. При их отлове понадобятся хорошие «капканы» (см. советы 3, 4, 5).

Совет 3. Принцип отсечения ложных гипотез*, или «Не выройся себе яму!»

Решая задачи, делаешь различного рода предположения (гипотезы). Главное, чего здесь следует опасаться, – это пойти на поводу у ложной гипотезы. Есть риск потратить много усилий, добиваясь успеха в заведомо безнадежном деле.

Пример 9

Основанием пирамиды является трапеция с основаниями a и b $(a > b)$ и высотой h. Грань пирамиды, проходящая через меньшее основание трапеции, перпендикулярна плоскости основания. Противолежащая грань является равнобедренным треугольником с углом α при вершине пирамиды.

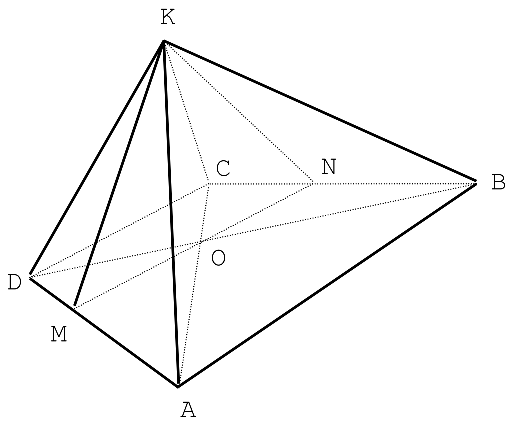

Рис.2

Через точку пересечения диагоналей основания и вершину пирамиды проведена плоскость, параллельная основаниям. Найти площадь треугольника, получившегося в сечении.

Многие абитуриенты ошибочно считали, что прямая, по которой плоскость пересекает основание пирамиды, является средней линией трапеции. После этого предположения дальше можно было уже не суетиться. (Проверь свои силы, решив эту задачу самостоятельно!)

Отсечение ложных гипотез можно осуществлять, пользуясь «методом вариации параметров». Так, если в нашей задаче изменить длины боковых сторон и оснований трапеции (сделав для наглядности несколько чертежей на черновике), то станет совершенно очевидным, что отрезок, проходящий через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям, вовсе не должен быть средней линией.

Для отсечения ложных гипотез может пригодиться и «метод от противного». Надо допустить, что рассматриваемое утверждение верно, и посмотреть, к каким последствиям это приведет. (В нашей задаче трапеция превратится в параллелограмм.)

* Гипотеза – происходит от греческого слова «предположение». Гипотезой обычно называют предположение о связи, или причинах, или зависимостях между наблюдаемыми явлениями. С помощью гипотез часто пытаются раскрыть внутренний механизм таких явлений. Так же как и принцип, гипотеза играет чрезвычайно важную роль в построении теории. (Томилин А. Н. В поисках первоначального. – Ленинград: Детская литература, 1978. – С. 146.)

Если же ты сомневаешься в истинности некоторой формулы, то проверь ее на числовых примерах. (Поставь маленький эксперимент и попытайся найти «щель» – контрпример.) Помни, что если формула неверна хотя бы в одном случае, то она неверна вообще!!!

А теперь – поучительная таблица (надеюсь, что она тебе пригодится) для упражнений такого сорта.

Таблица очень популярных ложных формул	
1	$\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}$
2	$\frac{a}{a+b}=\frac{1}{1+b}$
3	$(a+b)^2=a^2+b^2$
4	$\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$
5	$\sqrt{a\pm b}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$
6	$\log_a(x+y)=\log_a x+\log_a y$

Формулы этой таблицы являются источниками многих ложных гипотез. Например, при виде уравнения $4^x+6^x=2\cdot 9^x$ некоторые храбрецы смело заявляют: «А я сейчас как возьму логарифм от обеих частей, так сразу все и прояснится!» Ясно, что эта надежда основана на шестой формуле таблицы. (В действительности, для решения этого уравнения надо разделить обе части на любую из входящих в него степеней.)

Скажем здесь же о феномене, который я называю «ложные» обозначения. Достаточно в задаче, особенно геометрической, ввести неудачные (иногда это избыточные) обозначения, и быстро идешь в тупик. А единственный выход из тупика – вернуться назад, что приводит к ненужным затратам времени.

Ложные гипотезы создает иногда сама наша рука, порой рисуя вместо произвольного треугольника равнобедренный или даже равносторонний, а в прямоугольном треугольнике гипотенузу равной катету. Такой чертеж создает непреодолимые трудности, направляя нас по вектору психологической инерции в другую сторону.

С задачей надо обращаться нежно, не навязывая ей своей воли. При этом может оказаться полезным «принцип наибольшей общности или наихудшего случая», название которого говорит само за себя. Так, если в задаче речь идет о пирамиде, то вовсе не обязательно, чтобы она была правильной; центр вписанного в пирамиду шара вовсе не обязан лежать на высоте пирамиды. Если же пирамида правильная, то центр вписанного в нее шара действительно лежит на ее высоте, но не совпадает с серединой высоты и т. д.

Принцип отсечения ложных гипотез тесно связан с более общим принципом, изложенным в следующем пункте.